УДК 550.831

О приложениях модуля градиента потенциала силы тяжести в задаче Алексидзе

Дубовенко Ю.И..
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, г. Киев, Украина
тел.: 038(44) 424-2052, dubovenko@igph.kiev.ua

Gravity transformations are performed by the solution of the Alexidze problem. By its help the efficient method of unique and stable solution for iterative specification of a magnetic field transformations is given, providing the additive presentation of a magnetic potential. Its convergence is postulatued

Трансформации региональных аномалий поля силы тяжести $g(x)$ во внешнем пространстве y^{+} с адекватной точностью целесообразно осуществлять, решая нелинейную граничную задачу Алексидзе [1] для уравнения Лапласа, в граничных условиях которой стоят сами значения силы тяжести, являющиеся значениями модуля градиента потенциала силы тяжести (МГПСТ) $g(x)=|\mathrm{grad}\,W(x)|$. Обобщенно постановка задачи Алексидзе такова: найти потенциал $W(x),\ x\in y^{+}$, удовлетворяющий внутри замкнутой области $y^{+}=y^{+}\cup\partial y$ уравнению Лапласа $\Delta W(x)=0,\ x\in y^{+}$, а в точках границы ∂y Ляпунова области y^{+} и на ∞ – условиям:

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{3}\left(\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2=g^2(x),\ x_i\in\partial y\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}W(x)\to 0\end{cases},\qquad (1)$$

где $g(x)$ – задана, y^{-} – ограниченная область пространства $R^{(3)}$ с тяготеющими массами, y^{+} – ее неограниченное дополнение без тяготеющих масс, ∂y – поверхность измерений – граница областей y^{-} и y^{+}.

Ее решение, в силу избранной однородной слоистой модели среды, определяет потенциал простого слоя с искомой плотностью, распространенной на контактной поверхности типа Ляпунова. Эта плотность определяется как решение уравнения силы тяжести, аналитическое выражение которого является следствием свойств МГПСТ $|\mathrm{grad}\,W(x)|$, а конкретный вид зависит от избранной модели Земли. В плоском случае эта задача решена итерационно. Точность ее решения существенно зависит от обусловленности задачи, параметров метода (числа и расположения фундаментальных решений), приближений направления искомого градиента, направления внешней нормали, вдоль которой вычисляют производные в граничных условиях (учет векторной природы поля). Однако, ее решение на простых моделях среды при определенных ограничениях на решение – успешно.

Задача (1) ориентирована на аналитическое продолжение поля вне источников аномальных масс при заданной с некой точностью модели среды и погрешностях измерений. На параметры среды наложено ограничение в виде кусочной непрерывности и дифференцируемости по Фреше ради изображение приращений решений задачи линейной комбинацией приращений параметров модели (выделение главной линейной части искомого решения).

Основное априорное предположение о поведении искомого решения обратной задачи (линейная независимость оператора решения и его производных) обеспечивается одним из методов [2]. Указанных ограничений достаточно для численной сходимости к точному решению. Решение задачи неоднозначно из-за конечного вертикального разрешения, неадекватного выбор модели задачи и/или начальных приближений решения, что свойственно природе обратных задач с производными в граничных условиях. Точность дискретизации задачи зависит и от способа вычислений производных.

Нюансы численного моделирования таковы: осцилляция интегральных ядер операторов обратной задачи и существенная зависимость их визуализации от избранного способа гриддинга. Нивелировать осцилляцию можно, задействовав конструкции типа интеграла Шварца для полосы [3], а нюансы графической визуализации нуждаются в эксперименталь-

ном исследовании и выборе адекватного инструментария.

При всей сложности численной реализации задачи Алексидзе, очертим круг ее применений: уточнение фигуры Земли и аналитические трансформации гравимагнитных полей.

Остановимся детальнее на восстановлении магнитного потенциала с помощью задачи Алексидзе. Если магнитный потенциал изобразить как сумму $V(x)=U(x)+T(x)$ нормального $U(x)$ для данной эпохи и аномального $T(x)$ магнитных потенциалов, то восстановить магнитный потенциал $V(x)\big|_{x=0}$ по заданным значениям модуля его градиента $Z(x)=|\operatorname{grad}V(x)|$, $x\in\partial y$ упрощенно можно по алгоритму, в котором последовательно вычисляем:

1. производные $V_j^{(i+1)}(x)=\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}+\dfrac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}$, $V_{jk}^{(i+1)}(x)=\dfrac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_k}+\dfrac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k}$, где $\dfrac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\dfrac{x_j-\xi_j}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi$, $\dfrac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k}=\dfrac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\dfrac{(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)}{|x-\xi|^5}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi$;

2. направляющие косинусы $\cos(n_{i+1},x_k)=V_k^{(i+1)}(x)/Z_{i+1}(x)$;

3. следующее приближение модуля градиента магнитного потенциала

$$Z_{i+2}(x)=Z_{i+1}(x)-\omega^2\sum_{k=1}^{3}\cos(n_{i+1},x_k)\cdot x_k,\ x\in\partial y;$$

4. дежурное приближение аномального магнитного потенциала:

$$T_{i+2}(x)=Z_{i+2}(x)\cos(n_{i+1},m)-\gamma(x)\cos(\nu,m),\ x\in\partial y; \qquad (2)$$

5. следующее приближение магнитного потенциала: $V^{(i+2)}(x)=U(x)+T_{i+2}(x)$.

В качестве нормального потенциала целесообразно взять аномальное поле однородно наманиченного шара: аномальный потенциал $T(x)$ отразит поле реальных объектов, неучтенных в этой модели. Кроме данных $Z(x)$, $x\in\partial y$ (по-сути, ΔT_a) известны уравнение физической поверхности ∂y Земли, вектор единичной нормали $m(x)=\cos(x_k,m_x)$, $k=\overline{1,3}$ к ∂y почти в любой ее точке, и нормальное поле $U(x)$, поэтому в любой точке x замкнутой области $\overline{y}^+$ можно вычислить нормаль $\nu(x)=\cos(\nu,x_k)=\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_k}$ к эквипотенциальной поверхности $U(x)=Cx$, проходящей через точку x, и $\cos(\nu,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(\nu,x_k)\cos(x_k,m)$, $\dfrac{1}{\gamma(x)}=|\operatorname{grad}V(x)|$.

Если поверхность Земли ∂y – множество Ляпунова, магнитный потенциал $V(x)$, $x\in y^+$ данной эпохи восстанавливается *однозначно* по напряженности $Z(x)$, $x\in\partial y$ магнитного поля этой эпохи.

Так, на *i*-м шаге определим $\cos(n_i,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(n_i,x_k)\cos(x_k,m)$ и граничное условие

$$F_i(x)=Z(x)\cos(n_i,m)-\gamma(x)\cos(\nu,m) \qquad (3)$$

для определения *i*-го приближения плотности $\delta_i(x)$ потенциала простого слоя $T_i(x)$ из линейного интегрального уравнения Фредгольма

$$\delta_i(x)+\int\limits_{\partial y}K(x,\xi)\delta_i(\xi)dS_\xi=2F_i(x),\ x\in\partial y$$

с ядром $K(x,\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial m_x}\dfrac{1}{|x-\xi|}=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$, где $u=x-\xi$. Далее вычисляем приближение

$$T_i(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\delta_i(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ V_i(x)=U(x)+T_i(x),\ Z_i(x)=\sqrt{\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_k}\right)^2},\ x\in y^+, \qquad (4)$$

и i+1-е приближение направляющих косинусов: $\cos(n_i, x_k) = \frac{1}{Z_i(x)} \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_k}$, $k = \overline{1,3}$.

Последовательность $\{T_i(x)\}$ из (4) сходится в себе, как следствие теоремы: если квадрат $\varepsilon^2(x)$ отношения модулей градиентов аномального и нормального потенциалов пренебрежимо мал по сравнению с $\varepsilon(x)$, то последовательность решений $\{T_i(x)\}$ граничных задач

$$\Delta T_{i+1}(x) = 0, \; x \in y^+, \; \lim_{|x| \to \infty} T_{i+1}(x) \to 0, \; \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m_x} = F_{i+1}(x), \; x \in \partial y \tag{5}$$

сходится к аномальному потенциалу $T(x)$, $x \in y^-$ при $\|T(x)\|_C << \|U(x)\|_C$.

Впрочем, последнее условие необязательно, ибо граничное условие $\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m_x} = F_{i+1}(x)$, $x \in \partial y$ проще, чем условие (3). Для сходимости последовательности $\{T_i(x)\}$ достаточно, чтобы $Z(x) < \gamma(x) / \cos(\nu, m)$, $x \in \partial y$. Эта схема восстановления магнитного потенциала $\{T_i(x)\}$ экономичнее по обьему вычислений, чем схема [4].

Качество численного решения (среднеквадратичное отклонение параметров модели задачи (5) и входных данных от начального приближения) на текущей итерации контролируется по критерию невязки при дополнительном условии минимума разрешающей способности. Оно зависит от меры обусловленности задачи и выбора начальных приближений решения. Все решения получены для модели шара и нуждаются в проверке на полевых данных.

1. *Дубовенко Ю.І.* Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофіз. журн. – 2009. – **31**, № 6. – С. 132-139.

2. *Алексидзе М.А*. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука, 1978. – 351 с.

3. *Дубовенко Ю.І.* Відновлення контактної границц в шаруватому середовищі // Геофіз. журн. – 2002. – **24**, № 6. – С. 36-41.

4. *Якимчик А.И*. О способе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода // Докл. НАН Украины. – 2000, № 12. – С. 156-159.